Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 février 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I$ et telle que A n'est pas une matrice scalaire. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution : *Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de E. Il existe un unique endomorphisme u de E ayant A comme matrice dans la base e. Puisque $A^2 = I$, $u^2 = \mathrm{id}$ et donc u est une symétrie vectorielle. On a*

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}).$$

En effet, on peut toujours écrire $x = \dfrac{1}{2}(x + u(x)) + \dfrac{1}{2}(x - u(x))$ avec $x + u(x) \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $x - u(x) \in \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. L'intersection de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ étant bien sûr réduite au vecteur nul.

Comme A n'est pas scalaire, $u \neq \mathrm{id}$ et $u \neq -\mathrm{id}$. Par conséquent, aucun des deux noyaux n'est $\mathbb{R}^2$ tout entier. Les noyaux $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ sont donc des droites vectorielles. Considérons $f_1 \neq 0$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $f_2 \neq 0$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. D'après le théorème sur les bases adaptées à une somme directe, $f = (f_1, f_2)$ est une base de E. Dans cette base,

$$D = Mat_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De la même façon, il existe un unique endomorphisme v ayant $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme matrice dans la base canonique. Comme $B^2 = \mathrm{id}$, le même raisonnement montre que v est une symétrie vectorielle et permet de construire une base g dans laquelle $Mat_g(v) = D$.

Par conséquent, puisque A et D sont semblables et que B et D sont semblables, on en déduit que A et B sont semblables.

Références