Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Á quelle condition deux matrices E_{pq} et E_{kl} de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

Solution : *Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique.*

1. *Une condition nécessaire est que les matrices aient même trace. Donc si $p = q$ et $k \neq l$, (ou bien $p \neq q$ et $k = l$), les deux matrices ne sont pas semblables.*
2. *Montrons que deux matrices E_{pp} et E_{qq} $(p \neq q)$ sont semblables. Soit u l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = E_{pp}$. Considérons la base e' obtenue en permutant les deux vecteurs e_p et e_q. Dans la base e', la matrice de u est E_{qq}. Par conséquent, les deux matrices E_{pp} et E_{qq} représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes : elles sont semblables. Complément : écrivez la matrice de passage de la base e vers la base e', et son inverse.*
3. *Soient quatre indices $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $p \neq q$ et $(k, l) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq l$. Notons u l'unique endomorphisme ayant pour matrice E_{pq} dans la base e. Considérons la base e' obtenue en échangeant les vecteurs $e_q \leftrightarrow e_l$ et $e_p \leftrightarrow e_k$. Alors la matrice de l'endomorphisme u dans la base e' est la matrice E_{kl} (faire un dessin et vérifier ce résultat même lorsque $p = q$ ou $k = l$). Donc les matrices E_{pq} et E_{kl} sont semblables. Pouvez-vous écrire la matrice de passage $P_{e \rightarrow e'}$ correspondante ? Quel est son inverse ?*

Références