Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \nearrow & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.*
2. *Pour une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, calculer la matrice PAP.*
3. *En déduire qu'une matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Solution :

1. *Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E. Alors il existe un unique $u \in L(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = P$. On a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = e_{n-i+1}$ et $u^2(e_i) = e_i$, donc $P^2 = I_n$. Par conséquent, $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = P$.*
2. *Puisque $P = \sum_{k=1}^n E_{k,n-k+1}$,*

$$PAP = \sum_{1 \leqslant i,j,k,l \leqslant n} a_{ij} E_{k,n-k+1} E_{ij} E_{n-l+1,l} = \sum_{i,j,k,l} \delta_{n+1-k,i} \delta_{j,n+1-l} E_{k,l} = \sum_{k,l} a_{n+1-k,n+1-l} E_{kl}$$

   La matrice PAP s'obtient en faisant deux symétries de A par rapport aux deux diagonales.
3. *Puisque $P^{-1} = P$, PAP^{-1} est une matrice triangulaire supérieure lorsque A est une matrice triangulaire inférieure.*

Références