

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D^T & a \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $C, D \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que B est inversible. Montrer que A est inversible si et seulement si

$$a \neq {}^t DB^{-1}C$$

Solution : Si A n'était pas inversible, il existerait X tel que $AX = 0$ avec $X \neq 0$. De plus, $x_n \neq 0$ (car B inversible). En notant $\tilde{X} = (x_1, \dots, x_{n-1})$, on obtiendrait que $B\tilde{X} + x_n C = 0$ et ${}^t D\tilde{X} + ax_n = 0$, d'où la relation.

Réciproquement, si $a = {}^t DB^{-1}C$, alors on construit un vecteur $X = -(B^{-1}C, -1)$, on a $AX = 0$ avec bien sûr $X \neq 0$.

Références