Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D^{\mathrm{T}} & a \end{pmatrix}$$

où $B \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $C, D \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que B est inversible. Montrer que A est inversible si et seulement si

$$a \neq^t DB^{-1}C$$

Solution : *Si A n'était pas inversible, il existerait X tel que $AX = 0$ avec $X \neq 0$. De plus, $x_n \neq 0$ (car B inversible). En notant $\tilde{}X = (x_1, \dots, x_{n-1})$, on obtiendrait que $B\tilde{}X + x_nC = 0$ et ${}^tD\tilde{}X + ax_n = 0$, d'où la relation.*

Réciproquement, si $a =^t DB^{-1}C$, alors on construit un vecteur $X = -\left(B^{-1}C, -1\right)$, on a $AX = 0$ avec bien sûr $X \neq 0$.

Références