

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

1. Soit un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow \exists (X, Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*{}^2 A = XY^T$.

Solution :

1. Comme $\text{rg}(u) = 1$, d'après la formule du rang, $\text{Ker } u$ est de dimension $n - 1$ où $n = \dim E$. Soit e' une base de $\text{Ker } u$. On applique le théorème de base incomplète pour compléter par un vecteur $e_n \in E$ en une base e de E . Comme $\text{Vect}(e_n) = \text{Im } u$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $u(e_n) = \lambda e_n$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ alors $u(x) = x_n u(e_n) = x_n \lambda e_n$ et $u^2(x) = x_n \lambda^2 e_n = \lambda u(x)$ et la propriété est prouvée.
2. — Supposons que $\text{rg}(A) = 1$. Soit b la base canonique de \mathbb{K}^n . Il existe $u \in L(\mathbb{K}^n)$ tel que $\text{Mat}_b(u) = A$. Comme $\text{rg}(u) = \text{rg}(A) = 1$, d'après la question 1, on sait qu'il existe une base e de \mathbb{K}^n tel que $u(e_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $u(e_n) = \lambda e_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.
Donc

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ \text{equ}0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda X_0 X_0^T$$

avec $X_0 = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Si $P = P_{b \rightarrow e}$ alors $A = P X_0 X_0^T P^{-1} = X Y^T$ avec $X = \lambda P X_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $Y = P^{-1T} X_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Remarquons que X et Y sont non nuls car c'est le cas de X_0 et que P est inversible.

- Réciproquement, si $A = X Y^T$ avec $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ alors

$$A = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}.$$

Toutes les colonnes de A sont colinéaires donc $\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 1$ car
 X est non nul.

Références