Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

1. *Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u^2 = \lambda u$.*
2. *Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\operatorname{rg}(A) = 1 \Leftrightarrow \exists (X,Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^{*2}\ A = XY^{\mathrm{T}}$.*

Solution :

1. *Comme $\operatorname{rg}(u) = 1$, d'après la formule du rang, $\operatorname{Ker} u$ est de dimension $n-1$ où $n = \dim E$. Soit e' une base de $\operatorname{Ker} u$. On applique le théorème de base incomplète pour compléter par un vecteur $e_n \in E$ en une base e de E. Comme $\operatorname{Vect}(e_n) = \operatorname{Im} u$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $u(e_n) = \lambda e_n$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ alors $u(x) = x_n u(e_n) = x_n \lambda e_n$ et $u^2(x) = x_n \lambda^2 e_n = \lambda u(x)$ et la propriété est prouvée.*
2. — *Supposons que $\operatorname{rg}(A) = 1$. Soit b la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Il existe $u \in L(\mathbb{K}^n)$ tel que $Mat_b(u) = A$. Comme $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) = 1$, d'après la question 1, on sait qu'il existe une base e de $\mathbb{K}^n$ tel que $u(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $u(e_n) = \lambda e_n$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Donc*

$$Mat_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ equ0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda X_0 {X_0}^{\mathrm{T}}$$

   avec $X_0 = (0, \dots, 0, 1)^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Si $P = P_{b \to e}$ alors $A = P X_0 {X_0}^{\mathrm{T}} P^{-1} = XY^{\mathrm{T}}$ avec $X = \lambda P X_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $Y = {P^{-1}}^{\mathrm{T}} X_0 \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Remarquons que X et Y sont non nuls car c'est le cas de X_0 et que P est inversible.

   — *Réciproquement, si $A = XY^{\mathrm{T}}$ avec $X = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^*$ alors*

$$A = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}.$$

Toutes les colonnes de A sont colinéaires donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 1$ *car X est non nul.*

Références