Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer tous les endomorphismes $u \in L(E)$ tels que :

$$\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(1,2), \text{ et } \operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(1,1)$$

Solution : *Posons $f_1 = (1,2)$ et $f_2 = (0,1)$. Comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires, $u(f_2)$ est non nul et élément de $\operatorname{Im} u$. Il existe donc $\alpha \neq 0$ tel que $u(f_2) = (\alpha, \alpha)\, \alpha e_1 + \alpha e_2 = \alpha f_1 - \alpha f_2 =$. On vérifie facilement que $f = (f_1, f_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. Il est clair que $\operatorname{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$. De plus, $P_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{f\to e} = P_{e\to f}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\operatorname{Mat}_e(u) = P_{e\to f} \operatorname{Mat}_f(u) P_{f\to e} = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha \\ -2\alpha & \alpha \end{pmatrix}$. On en déduit que $u(x,y) = \alpha(-2x+y, -2x+y)$. Réciproquement, on vérifie facilement que tous les endomorphismes de cette forme satisfont l'hypothèse.*

Références