

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer tous les endomorphismes $u \in L(E)$ tels que :

$$\text{Ker}(u) = \text{Vect}(1, 2), \text{ et } \text{Im } u = \text{Vect}(1, 1)$$

Solution : Posons $f_1 = (1, 2)$ et $f_2 = (0, 1)$. Comme f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires, $u(f_2)$ est non nul et élément de $\text{Im } u$. Il existe donc $\alpha \neq 0$ tel que $u(f_2) = (\alpha, \alpha) \alpha e_1 + \alpha e_2 = \alpha f_1 - \alpha f_2 =$.
On vérifie facilement que $f = (f_1, f_2)$ forme une base de \mathbb{R}^2 . Il est clair que $\text{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$.
De plus, $P_{e \rightarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{f \rightarrow e} = P_{e \rightarrow f}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\text{Mat}_e(u) = P_{e \rightarrow f} \text{Mat}_f(u) P_{f \rightarrow e} = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha \\ -2\alpha & \alpha \end{pmatrix}$. On en déduit que $u(x, y) = \alpha(-2x + y, -2x + y)$. Réciproquement, on vérifie facilement que tous les endomorphismes de cette forme satisfont l'hypothèse.

Références