Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. On considère $u \in \mathfrak{L}(E)$ représenté dans la base e par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que la famille $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = -e_1 + e_2 - e_3$, $\varepsilon_2 = e_2$ et $\varepsilon_3 = e_2 + e_3$ est une base de E. Écrire la matrice de passage de la base e à la base ε.*
2. *Calculer la matrice de u dans la base ε.*
3. *En déduire la matrice de u^n dans la base e.*

Solution :

1. *Comme* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et que* $\det(\mathrm{Mat}_e(\varepsilon)) = 1$, *la famille ε est de rang 3 et forme donc une base de E. De plus* $P_{e\to\varepsilon} = \mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$.
2. *Appliquant les formules de changement de bases :* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(u) = P_{\varepsilon\to e}\,\mathrm{Mat}_e(u)\,P_{e\to\varepsilon}$ *avec* $P_{\varepsilon\to e} = (P_{e\to\varepsilon})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_e(u) = A$. *On en déduit que* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. *Notons* $P = P_{e\to\varepsilon}$ *et* $A_0 = \mathrm{Mat}_\varepsilon(u)$. *On a donc :* $\mathrm{Mat}_e(u^n) = A^n = \left(PA_0P^{-1}\right)^n = PA_0^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1+2^n & 2^n & 0 \\ 1-2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Références