Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$*. Notons* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base* e *est* A*.*

1. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$*. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Déterminer une base à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$ *et écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Écrire* f *comme composée de transformations vectorielles élémentaires.*

Solution :

1. *Pour tout* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$*, on vérifie facilement que* $f(x, y, z) = (2x + 4y + 4z, 4y + 2z, -4y - 2z)$*. On en déduit que* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1)$ *où* $\varepsilon_1 = (2, 1, -2)$*et que* $\operatorname{Im} f = Vect(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *où* $\varepsilon_2 = (1, 0, 0)$ *et* $\varepsilon_3 = (0, 1, -1)$*. On vérifie facilement que la famille* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est une base de* E*. Comme* (ε_1) *est une base de* $\operatorname{Ker} f$ *et que* $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est une base de* $\operatorname{Im} f$*, on sait que* $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Ker} f$ *sont supplémentaires dans* E*.*
2. *La famille* ε *est adaptée à la supplémentarité de* $\operatorname{Im} f$ *et de* $\operatorname{Ker} f$*. Utilisant la formule de changement de base :* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = P_{\varepsilon\to e} \operatorname{Mat}_e(f) P_{e\to\varepsilon}$ *où* $P_{e\to\varepsilon} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et où* $P_{\varepsilon\to e} = {P_{e\to\varepsilon}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$*, on obtient*

$$\operatorname*{Mat}_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. f est alors la composée de l'homothétie vectorielle de rapport 2 et de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\operatorname{Im} f$ *parallèlement au plan* $\operatorname{Ker} f$*.*

Références