Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$. On considère f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base e est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer A^2. Que peut-on en déduire au sujet de f ?*
2. *Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.*
3. *Prouver de deux façons différentes que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.*
4. *Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que $A^2 = A$. On a alors $f^2 = f$ et f est donc un projecteur de E.*
2. *Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a : $AX = 0$ si et seulement si $\begin{cases} 3x - 2y - 4z & = 0 \\ x - 2z & = 0 \\ x - y - z & = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire si et seulement si $X \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f = Vect\,(\varepsilon_1)$ où $\varepsilon_1 = 2e_1 + e_2 + e_3$.*
   Par ailleurs, posons $\varepsilon_2 = f\,(e_1)$ et $\varepsilon_3 = f\,(e_2)$. On vérifie, par un calcul matriciel facile que $\varepsilon_2 = 3e_1 + e_2 + e_3$ et que $\varepsilon_3 = -2e_1 + e_3$. Les vecteurs ε_2 et ε_3 sont dans $\operatorname{Im} f$ et sont non colinéaires. Ils forment donc une famille libre. En appliquant la formule du rang, on montre que $\dim \operatorname{Im} f = 2$. Il s'ensuit que cette famille est une base de $\operatorname{Im} f$.
3. *Comme f est un projecteur, $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont nécessairement supplémentaires dans E.*
4. *Utilisant la question précédente, la famille ε est adaptée à la supplémentarité de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$. On obtient facilement : $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Références