Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $e = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$*. Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *représenté par* A *dans la base* e*. On pose* $\varepsilon_1 = (1,0,1)\,,\quad \varepsilon_2 = (0,1,0)\,,\quad \varepsilon_3 = (1,0,2)\quad$ *et* $\quad\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$*.*

1. *Montrer que* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *Écrire la matrice de* f *dans cette base.*
3. *Déterminer une base de* $\operatorname{Ker} f$ *et de* $\operatorname{Im} f$*.*

Solution :

1. *On vérifie que* $\operatorname{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *est inversible donc* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$*.*
2. *D'après la formule de changement de base* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = P_{\varepsilon\to e} \operatorname{Mat}_e(f) P_{e\to\varepsilon}$ *avec* $P_{e\to\varepsilon} = \operatorname{Mat}_e(\varepsilon)$ *et* $P_{\varepsilon\to e} = (P_{e\to\varepsilon})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*. Il vient* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$*.*
3. *Les deux derniers vecteurs colonnes de* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(f)$ *sont non colinéaires et le premier est nul donc* $\operatorname{rg} f = 2$ *et* $\dim \operatorname{Im} f = 2$*. Les vecteurs* $f(\varepsilon_2) = (1,1,0)$ *et* $f(\varepsilon_3) = (0,0,-2)$ *sont non colinéaires et dans l'image de* f*. Il forment donc une base de* $\operatorname{Im} f$*. La formule du rang permet d'affirmer que* $\dim \operatorname{Ker} f = 1$*. Comme* $f(\varepsilon_1) = 0$*, une base de* $\operatorname{Ker} f$ *est* (ε_1)*.*

Références