Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\varepsilon_1 = (0,0,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,1)$ *et* $\varepsilon_3 = (0,1,1)$. *On pose :* $F = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *et* $G = Vect(\varepsilon_3)$.

1. *Prouver que* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ *est une base de* E *et en déduire que* $E = F \oplus G$.
2. *Déterminer la matrice dans la base canonique* e *de* E *de la projection* p *sur* F *parallèlement à* G.
3. *En déduire, dans la base canonique de* E, *la matrice de la symétrie* s *par rapport à* F *parallèlement à* G *et la matrice de la projection* p' *sur* G *parallèlement à* F.

Solution :

1. *Comme la matrice* $\mathrm{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible, la famille* ε *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
   Comme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *est une base de* F *et que* (ε_3) *est une base de* G, *on en déduit que* $E = F \oplus G$.
2. *On sait que* $\mathrm{Mat}_\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *donc grâce aux formules de changement de base* $\mathrm{Mat}_e(p) = P_{e\to\varepsilon} \mathrm{Mat}_\varepsilon(p) P_{\varepsilon\to e}$ *avec* $P_{e\to\varepsilon} = \mathrm{Mat}_e(\varepsilon)$ *et* $P_{\varepsilon\to e} = (P_{e\to\varepsilon})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *On effectue les calculs et on trouve* $\mathrm{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. *On sait que* $s = 2p - \mathrm{id}_E$ *et que* $p + p' = \mathrm{id}_E$ *donc* $\mathrm{Mat}_e(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_e(p') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Références