Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e, on considère la famille de vecteurs $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ donnés par $\varepsilon_1 = (1,0,2)$, $\varepsilon_2 = (0,1,1)$, $\varepsilon_3 = (1,0,1)$. Posons $F = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et $G = Vect(\varepsilon_3)$.

1. *Montrer que F et G sont supplémentaires dans E. Donner une base de E adaptée à la supplémentarité de ces deux sous-espaces vectoriels.*
2. *Écrire, dans la base e, la matrice de la projection p de E sur F parallèlement à G.*
3. *En déduire les matrices, dans la base e de :*
   (a) *la projection p' de E sur G parallèlement à F.*
   (b) *la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.*

Solution :

1. *On a* $\operatorname{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\det A = -1$. *La famille ε est donc une base de E. On en déduit que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ forme une base de F et que (ε_3) forme une base de G. Ces deux sous-espaces sont de plus clairement supplémentaires et la base ε est adaptée à cette supplémentarité.*
2. *On a :* $\operatorname{Mat}_\varepsilon(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et, en utilisant les formules de changement de base* $\operatorname{Mat}_e(p) = P_{e\to\varepsilon} \operatorname{Mat}_\varepsilon(p) P_{\varepsilon\to e}$ *avec* $P_{e\to\varepsilon} = \operatorname{Mat}_e(\varepsilon)$ *et* $P_{\varepsilon\to e} = (P_{e\to\varepsilon})^{-1}$. *Après calculs, on trouve* $\operatorname{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. (a) *On sait que* $p + p' = \mathrm{id}_E$. *Donc* $\mathrm{Mat}_e\left(p'\right) = I_3 - \mathrm{Mat}_e\left(p\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) *On sait aussi que* $s = 2p - \mathrm{id}_E$. *Donc* $\mathrm{Mat}_e\left(s\right) = 2\,\mathrm{Mat}_e\left(p\right) - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Références