Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$ tous deux munis de leurs bases canoniques respectives qu'on notera $e = (e_1, e_2, e_3)$ et $f = (f_1, f_2)$. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, y - z) \end{array} \right.$.

1. *Prouver que $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et écrire la matrice de u relativement aux bases e et f.*
2. *On considère les familles de vecteurs $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = (0, 1, -1)$, $e'_2 = (1, 0, 2)$,$e'_3 = (1, 1, 0)$ et $f' = (f'_1, f'_2)$ avec $f'_1 = (1, 0)$, $f'_2 = (1, 1)$. Montrer que e' et f' sont des bases de respectivement E et F et écrire les matrices de changement de base de e vers e' et de f vers f'.*
3. *En déduire la matrice de u relativement aux bases e' et f'.*

Solution :

1. *On vérifie facilement que u est linéaire. De plus* $\mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. *On écrit* $\mathrm{Mat}_e\, e' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *et comme* $\det(\mathrm{Mat}_e\, e') = 1$ *on en déduit que e' est une base de E. De même* $\mathrm{Mat}_f(f') = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\det(\mathrm{Mat}_f(f')) = 1$. *La famille f' est donc une base de F. De plus* $P_{e \to e'} = \mathrm{Mat}_e\, e'$ *et* $P_{f \to f'} = \mathrm{Mat}_f\, f'$.
3. *La formule de changement de bases est* $\mathrm{Mat}_{f' \leftarrow e'}(u) = P_{f' \to f}\, \mathrm{Mat}_{f \leftarrow e}(u)\, P_{e \to e'}$ *et comme* $P_{f' \to f} = (P_{f \to f'})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a* $\mathrm{Mat}_{f' \leftarrow e'}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Références