Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient :

$$P_1 = X^2 + 1, \quad P_2 = X + 1 \quad \text{et} \quad P_3 = 2X^2 - X$$

On note $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}_2[X]$.

1. *Montrer que* $\mathscr{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ *forme une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *Écrire la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *à* $\mathscr{B}'$*, puis celle de* $\mathscr{B}'$ *à* $\mathscr{B}$.
3. *Soit* $P(X) = X^2 - X + 2$. *Donner les composantes de* P *dans la base* $\mathscr{B}'$.
4. *On considère l'endomorphisme de* $\mathbb{R}_2[X]$ *donné par* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP' \end{array} \right.$. *Déterminer la matrice de* θ *dans la base* $\mathscr{B}'$.

Solution :

1. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = 1$ *donc la famille* $\mathscr{B}'$ *est libre. Cette famille est de plus de cardinal égal à la dimension de* $\mathbb{R}_2[X]$ *ce qui prouve que c'est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
2. *On a* $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ *et* $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = (P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
3. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P) = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. *On a* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\theta) = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta) P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Références