Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose :

$$f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3, \quad f_2 = e_2 + e_3, \quad f_3 = e_1 + 2e_3$$

1. *Prouver que (f_1, f_2, f_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Écrire la matrice de passage de la base e à la base f.*
3. *Déterminer la matrice de passage de la base f à la base e.*
4. *On considère le vecteur u de coordonnées $(-1, 0, 2)$ dans la base canonique. Quelles sont ses coordonnées dans la base f ?*
5. *On considère l'endomorphisme $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-2z, -x-z, -x+2y) \end{array} \right.$. Déterminer la matrice de θ dans la base f.*

Solution :

1. *On a :* $\operatorname{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Le déterminant de cette matrice est -1. On en déduit que la famille f est libre et comme elle est de cardinal égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Par définition :* $P_{e\to f} = \operatorname{Mat}_e(f)$.
3. *De même* $P_{f\to e} = (P_{e\to f})^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
4. *D'après la formule de changement de base* $\operatorname{Mat}_f u = P_{f\to e} \operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5. *On a :* $\operatorname{Mat}_e(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. *En utilisant la formule de changement de base* $\operatorname{Mat}_f(\theta) = P_{f\to e} \operatorname{Mat}_e(\theta) P_{e\to f}$, *on trouve* $\operatorname{Mat}_f(\theta) = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 5 \\ -12 & -6 & -11 \end{pmatrix}$

Références