# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★ ***Pas de titre***

*On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $e = (e_1, e_2)$. On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ donné par :*

$$f(e_1) = e_1 + e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = -e_1 + 2e_2$$

1. *Déterminer la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique $e$.*
2. *Soit $v = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2$. Calculer les composantes $x'$ et $y'$ de $f(v)$ dans la base canonique $e$.*
3. *On pose : $\varepsilon_1 = e_2$ et $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$. Prouver que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $E$.*
4. *Déterminer $P_{e\to\varepsilon}$ ainsi que $P_{\varepsilon\to e}$.*
5. *En déduire la matrice $B$ de $f$ dans la base $\varepsilon$ et en déduire les expressions de $f(\varepsilon_1)$ et $f(\varepsilon_2)$ en fonction de $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$.*

***Solution :***

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. *Par linéarité de $f$ :* $f(v) = (x - y, x + 2y)$
3. *Comme* $\operatorname{Mat}_e(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et que cette matrice est inversible, la famille $\varepsilon$ est une base de* $\mathbb{R}^2$.
4. *Comme* $P_{e\to\varepsilon} = \operatorname{Mat}_e(\varepsilon)$ *alors* $P_{\varepsilon\to e} = (P_{e\to\varepsilon})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. *La formule de changement de base amène* $B = \operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = P_{\varepsilon\to e} \operatorname{Mat}_e(f) P_{e\to\varepsilon}$. *Après calcul, on trouve :* $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *De plus, par lecture de cette matrice, on trouve que* $f(\varepsilon_1) = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ *et* $f(\varepsilon_2) = 3\varepsilon_1$

## Références