Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de l'algèbre $L(E)$. On suppose que $\forall f \in L(E)$, $f^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow f \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mathcal{A} = L(E)$.

Solution : *Raisonnons de façon équivalente sur les matrices carrées. Supposons que $\mathcal{A}$ soit une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $M^2 \in \mathcal{A} \Rightarrow M \in \mathcal{A}$. Il suffit de montrer que toute matrice E_{ij} de la base canonique appartient à $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$, $0_{L(E)} \in \mathcal{A}$. Or si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{ij}^2 = E_{ij}E_{ij} = \delta_{ij}E_{ij}$. Par conséquent, si $i \neq j$, $E_{ij}^2 \in \mathcal{A}$ et donc $E_{ij} \in \mathcal{A}$. Soit maintenant $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $j \neq i$. On sait que $E_{ij}, E_{ji} \in \mathcal{A}$ et comme $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$, le produit $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$ est encore dans $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ contient toutes les matrices de la base canonique et que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A} = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.*

Références