Extrait des petites Mines 2006

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Extrait des petites Mines 2006 Mines-Ponts**

I-Étude de deux ensembles de matrices

Soit (x, y) un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note $M_{x,y}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$$

Soit Σ le sous-ensemble de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ tel que $\Sigma = \left\{M_{x,y} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

1. *Quelle relation doivent vérifier x et y pour que la matrice $M_{x,y}$ ne soit pas inversible ? Calculer le produit $M_{x,y} \times M_{-x,y}$. En déduire l'inverse de $M_{x,y}$ lorsqu'il existe.*
2. *Σ est-il un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$? On justifiera sa réponse.*
   Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ et $J = \left\{A + M_{x,y} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
3. *Montrer que J est un sous-espace vectoriel de $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$.*
4. *Quelle est la dimension de J ? Déterminer une base de J.*
5. *Montrer que la loi $\times$ est interne dans J.*

II - Étude d'une application de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

Soit B une matrice quelconque de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Soit φ_B l'application de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui à la matrice X associe la matrice $\varphi_B(X) = B \times X$.

1. *Montrer que φ_B est un endomorphisme de l'espace vectoriel $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$.*
2. *On suppose dans cette question que $B = M_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.*
   (a) *φ_B est elle surjective ? Bijective ?*
   (b) *Déterminer la matrice de φ_B dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.*
   On rappelle que la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est constituée des matrices $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *On prend dans cette question* $B = M_{0,-2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. φ_B *est-elle surjective ? Bijective ?*

Solution : *I.*

1. $M_{x,y}$ *n'est pas inversible lorsque* $x^2 - y^2 - 2y = 0$. *Dans les autres cas,* $M_{x,y}$ *est inversible dans* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, *mais peut-être pas dans* Σ.
   $M_{x,y} \times M_{-x,y} = (y^2 - x^2 + 2y)I_2$. *Donc, lorsque* $x^2 - y^2 - 2y \neq 0$, $M_{x,y}^{-1} = M\left(-\frac{x}{y^2-x^2+2y}, \frac{y}{y^2-x^2+2y}\right)$ *qui appartient bien à* Σ.
2. *La matrice nulle n'appartient pas à* Σ. *Donc* Σ *n'est pas un sous-espace vectoriel de* $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$.
3. *L'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & A + M_{x,y} \end{array} \right.$ *est linéaire, clairement surjective. Son noyau est réduit au vecteur nul.* φ *est donc bijective.*
4. *Une base de* E *est donc, par exemple,* $(\varphi(1,0), \varphi(0,1))$. J *est de dimension* 2.
5. $\varphi(x,y).\varphi(x',y') = \begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'-y' & y' \\ 0 & x'+y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' - xy' - yx' + yy' & xy' + yx' \\ 0 & xx' + xy' + yx' + yy' \end{pmatrix}$
   $= \varphi(xx' + yy', xy' + yx')$. *C'est bien dire que la loi* $\times$ *est interne dans* J.

II.

1. *On a* $B(\lambda X + \mu Y) = \lambda BX + \mu BY$. *De plus* $BX \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. φ_B *est donc un endomorphisme de* $(\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), +, .)$.
2. (a) *On a* $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On a* $\varphi_{B^{-1}}(\varphi_B(X)) = B^{-1}.\varphi_B(X) = B^{-1}BX = X$. *On a donc* $\varphi_{B^{-1}} = (\varphi_B)^{-1}$.
   (b) *On a* $BE_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{2,1}$. *On obtient ainsi la première colonne de la matrice de* φ_B *dans la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. *On trouve de la même façon les autres colonnes :* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. *Cette fois* B *n'est pas inversible. Puisqu'il n'est pas question d'obtenir une solution à* $\varphi_B(X) = I_2$, φ_B *n'est pas surjective et donc pas bijective.*

Références