Matrices magiques

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Matrices magiques***

Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ est dite magique si elles vérifie les 4 conditions suivantes :

1. *Pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on a :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 0$.
2. *Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on a :* $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = 0$.
3. *On a :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0$.
4. $a_{13} + a_{22} + a_{31} = 0$.

On notera $\mathscr{M}$ l'ensemble des matrices magiques.

1. *Montrer que l'ensemble des matrices magiques possède une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
2. *Montrer que si $M \in \mathscr{M}$ alors $M^{\mathrm{T}} \in \mathscr{M}$.*
3. *Caractériser les matrices magiques antisymétriques et les matrices symétriques. On notera $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices magiques antisymétriques et $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices magiques symétriques.*
4. *Prouver que $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = \mathscr{M}$.*
5. *Interpréter le résultat obtenu.*

Solution :

1. *$\mathscr{M}$ est l'intersection des noyaux de huit formes linéaires. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ comme intersection de sous-espaces vectoriels.*
2. *C'est clair, les rôles des formes linéaires $A \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ik}$ et $A \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_{ki}$ étant échangés.*

3. *Soit* $A \in \mathscr{A}$. *On a* $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. *En posant* $a = a_{13}$ *on obtient* $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & -a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$ *et*
$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & -a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.
Soit $A \in \mathscr{S}$. *En posant* $a = a_{13}$ *on obtient* $a_{31} = a$ *et* $a_{22} = -2a$. *On pose* $b = a_{12}$ *d'où* $a_{21} = b$, $a_{11} = -a - b$, $a_{33} = b + 3a$, $a_{23} = a_{32} = 2a - b$. *La somme de la* $3^{\text{ème}}$ *colonne donne* $6a = 0$. *Donc* $\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b & 0 \\ b & 0 & -b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$.
4. $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ *est la somme directe de l'espace des matrices symétriques et de l'espace des matrices symétriques. Donc a fortiori* $\mathscr{A} \oplus \mathscr{S} = \mathscr{M}$. $(A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}}))$.
5. *On en déduit que* $\mathscr{M} = \left\{ \begin{pmatrix} -b & b-a & a \\ a+b & 0 & -a-b \\ -a & a-b & b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Références