Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ de la forme : $A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.

1. *Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. Donner une base de E.*
2. *Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.*
3. *Déterminer les éléments inversibles de E.*
4. *Déterminer les diviseurs de zéro de E.*

Solution :

1. *L'application* $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \end{array} \right.$ *est linéaire, clairement surjective. Son noyau est réduit au vecteur nul. φ est donc bijective. Une base de E est donc, par exemple,* $(\varphi(1,0), \varphi(0,1))$.
2. $\varphi(a,b).\varphi(a',b') = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'+b' & b' \\ -b' & a'-b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+ab'+ba' & ab'+ba' \\ -ba'-ab' & aa'-ab'-ba' \end{pmatrix} = \varphi(aa', ab'+ba')$. *$E$ est donc stable par multiplication. Comme il contient $I_2 = \varphi(1,0)$, c'est un sous-anneau de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.*
3. *Les éléments inversibles de E sont ceux pour lesquels $a \neq 0$. On a alors* $\varphi(a,b)^{-1} = \varphi\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a^2}\right)$.
4. *En résolvant le système* $\left\{ \begin{array}{rcl} aa' & = & 0 \\ ab'+ba' & = & 0 \end{array} \right.$ *On obtient par exemple $a=0$ ce qui interdit $b=0$ et implique $a'=0$. Donc les diviseurs de zéro sont les $(\varphi(0,b).\varphi(0,b'))$ avec $bb' \neq 0$.*

Références