Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Pour tout $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$, *on pose* $\Gamma_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & -\sin 2\vartheta & \sin^2\vartheta \\ \cos\vartheta.\sin\vartheta & \cos 2\vartheta & -\sin\vartheta.\cos\vartheta \\ \sin^2\vartheta & \sin 2\vartheta & \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$

1. *Démontrer que* $\Gamma = \{\Gamma_\vartheta, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ *est un groupe.*
2. *Calculer* $\det \Gamma_\vartheta$.

Solution :

1. *Soit* $A = \Gamma_\vartheta.\Gamma_\varphi = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. *On a*

$$\begin{array}{rcl}
a_{1,1} & = & \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi - \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
& = & \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi - 2\sin\vartheta.\sin\varphi\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
& = & (\cos\vartheta.\cos\varphi - \sin\vartheta.\sin\varphi)^2 = \cos^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{1,2} & = & -\cos^2\vartheta.\sin 2\varphi - \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \sin^2\vartheta.\sin 2\varphi \\
& = & -\sin 2\varphi.(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) - \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi = -(\cos 2\vartheta\sin 2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi) \\
& = & -\sin 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{1,3} & = & \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
& = & \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi + 2\sin\vartheta.\sin\varphi\cos\varphi.\sin\varphi + \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
& = & (\cos\vartheta.\sin\varphi + \sin\vartheta.\cos\varphi)^2 = \sin^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,1} & = & \cos\vartheta.\sin\vartheta.\cos^2\varphi + \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta\sin^2\varphi \\
& = & \sin\vartheta.\cos\vartheta.(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi \\
& = & \frac{1}{2}(\sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \cos 2\vartheta.\sin 2\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\vartheta + 2\varphi) \\
& = & \sin(\vartheta+\varphi).\cos(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,2} & = & -\cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\varphi + \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta\sin 2\varphi \\
& = & \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - 2\cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\varphi = \cos 2\vartheta.\cos 2\varphi - \sin 2\vartheta.\sin 2\varphi \\
& = & \cos 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{2,3} & = & \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin^2\varphi - \cos 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi - \sin\vartheta.\cos\vartheta.\cos^2\varphi \\
& = & -a_{2,1} = -\sin(\vartheta+\varphi).\cos(\vartheta+\varphi).
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
a_{3,1} &= \sin^2\vartheta.\cos^2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi + \cos^2\vartheta.\sin^2\varphi \\
&= a_{1,3} = \sin^2(\vartheta+\varphi). \\
a_{3,2} &= -\sin^2\vartheta.\sin 2\varphi + \sin 2\vartheta.\cos 2\varphi + \cos^2\vartheta.\sin 2\varphi \\
&= -a_{1,2} = \sin 2(\vartheta+\varphi). \\
a_{3,3} &= \sin^2\vartheta.\sin^2\varphi - \sin 2\vartheta.\sin\varphi.\cos\varphi + \cos^2\vartheta.\cos^2\varphi \\
&= a_{1,1} = \cos^2(\vartheta+\varphi).
\end{aligned}$$

Finalement $\Gamma_\vartheta.\Gamma_\varphi = \Gamma_{\vartheta+\varphi}$. *On a donc un morphisme de* $\mathbb{R}$ *sur* Γ, *qui fait donc de* Γ *un groupe.*

2. *Un calcul avec la règle de Sarrus n'est jamais méprisable :*

$$\begin{aligned}
\det\Gamma_\vartheta &= \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta.\sin^2\vartheta + \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\vartheta.\sin^2\vartheta \\
&\quad - \sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta. + \sin 2\vartheta.\cos\vartheta.\sin\vartheta.\cos^2\vartheta + \cos^2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta.\sin 2\vartheta \\
&= \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta + \cos\vartheta.\sin\vartheta.\sin 2\vartheta - \sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta \\
&= \cos^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\cos^2\vartheta + 2.\sin 2\vartheta.\sin\vartheta.\cos\vartheta - \sin^2\vartheta.\cos 2\vartheta.\sin^2\vartheta \\
&= \cos 2\vartheta.(\cos^4\vartheta - \sin^4\vartheta) + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta. \\
&= \cos 2\vartheta.(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta).(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta. \\
&= \cos 2\vartheta.\cos 2\vartheta + \sin 2\vartheta.\sin 2\vartheta = \cos^2(2\vartheta) + \sin^2(2\vartheta) = 1.
\end{aligned}$$

Si on utilise le fait que $\Gamma = \{\Gamma_\vartheta, \vartheta \in \mathbb{R}\}$ *est un groupe, alors un argument plus savant permet d'aboutir au même résultat :*

Tous les éléments de Γ_ϑ *sont en valeur absolue inférieurs á* 1. *Donc* $|\det\Gamma_\vartheta| \leqslant \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} 1 \leqslant 6$.

Or $\vartheta \longrightarrow \det\Gamma_\vartheta$ *est un morphisme de groupes. Son image est donc un sous-groupe borné de* $\mathbb{R}$. *Il est donc inclus dans* $\{-1;1\}$. *De plus,* $\vartheta \longrightarrow \det\Gamma_\vartheta$ *est une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *son image est donc un intervalle. C'est donc* $\{1\}$. *Donc,* $\forall\vartheta\in\mathbb{R}$, $\det\Gamma_\vartheta = 1$.

Références