Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère le sous-espace vectoriel V de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrez qu'aucun élément de V n'est inversible. Montrez que $(V, +, \times)$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Solution : *Soit $M = \lambda A + \mu B$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $MX = 0$. Donc M n'est pas inversible.*

Pour la suite, on a besoin de quelques calculs euphorisants : $AB = BA = -(A + B)$; $A^2 = B - 2A$; $B^2 = A - 2B$. On en déduit que V est stable par multiplication. On remarque ensuite que $(\lambda A + \mu B)(\lambda' A + \mu' B) = [(\lambda - \mu)(\lambda' - \mu') - 3\lambda\lambda']\, A + [(\lambda - \mu)(\lambda' - \mu') - 3\mu\mu']\, B$. On en déduit que la multiplication est commutative dans V. On cherche l'élément neutre de V sous la forme $\lambda' A + \mu' B$. On doit avoir $(\lambda A + \mu B)(\lambda' A + \mu' B) = \lambda A + \mu B$ pour tous λ et μ, donc en particulier lorsque $\lambda - \mu = 0$, ce qui donne $\lambda' = \mu' = -\frac{1}{3}$. On pose alors $E = -\frac{1}{3}(A + B)$. Ensuite on vérifie que $A(A+B)+3A = B(A+B)+3B = 0$ ce qui veut bien dire que $AE = A$ et $BE = B$. On en déduit par linéarité que E est élément neutre de V pour la multiplication.
Enfin $(A-B)^2 = A^2+B^2-2AB = -(A+B)+2(A+B) = -3E$. Donc en posant $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(A-B)$, on a $J^2 = -E$.
Maintenant on a tout reconstitué : (E, J) est une base de V et $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & V \\ z = a + bi & \longmapsto & aE + bJ \end{cases}$ est un isomorphisme d'anneaux qui transporte la structure de corps de $\mathbb{C}$ sur V.

Références