Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $c > 0$.

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x}{c} \\ \dfrac{x}{c} & 1 \end{pmatrix} \; ; \; x \in]-c;c[.$$

Démontrer que cet ensemble de matrices est un sous-groupe. (de quoi ?)

Solution : *On pose* $\varphi = \text{argth}\left(\frac{x}{c}\right)$ *; Soit* $x = c.th\varphi$*. Or* $1 - th^2\varphi = \dfrac{1}{ch^2\varphi}$*. Donc* $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = ch\varphi$*, et* $\dfrac{\frac{x}{c}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = sh\varphi$*. Donc* $M(x) = \begin{pmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{pmatrix}$*. En posant* $\vartheta = \text{argth}\left(\frac{y}{c}\right)$*, on a* $M(x).M(y) = \begin{pmatrix} ch(\varphi+\vartheta) & sh(\varphi+\vartheta) \\ sh(\varphi+\vartheta) & ch(\varphi+\vartheta) \end{pmatrix}$*. On obtient bien un sous-groupe du groupe des matrices inversibles. On l'appelle le groupe de Lorentz.*

Références