Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Posons :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $E = \left\{ xI + yJ \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. *Vérifier que* $J^2 = -I$ *et montrer que l'application* $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & E \\ x + iy & \longmapsto & xI + yJ \end{array} \right.$ *est un isomorphisme de corps.*

Solution : θ *est linéaire, et* $\theta(x + iy) = xI + yJ = 0$ *n'est vérifié que pour* $x = y = 0$. θ *est donc un isomorphisme linéaire entre* E *et* $\mathbb{C}$.
Une fois établi $J^2 = -I$, *on en déduit que* $\theta((xI+yJ)(x'I+y'J)) = \theta((xx'-yy')I+(xy'+yx')J) = \theta(xI + yJ)\theta(x'I + y'J)$. *Comme on a* $\theta(I) = 1$, *on a bien un isomorphisme de corps.*

Références