Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. *On note* $\mathcal{C}$ *l'ensemble des matrices qui commutent avec* A. *Montrer que* $\mathcal{C}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *et déterminer sa dimension.*

Solution : $\mathcal{C}$ *est le noyau de* $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX - XA \end{array} \right.$ *et en tant que tel est un sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. *On a clairement* $A \in \mathcal{C}$ *et* $I_2 \in \mathcal{C}$. *Remarquons aussi que les matrices de* $\mathcal{C}$ *commutent aussi avec* $S = A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$, *on a* $SM = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ *et* $MS = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$. *On a donc* $-b = c$ *et* $a = d$. *Donc* $\mathcal{C}$ *est bien le sous-espace vectoriel de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ *engendré par* A *et* I_2 *(ou par* S *et* I_2*.)*

Références