Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soient les ensembles

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } M = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Étudier si, munis des lois usuelles, L et M sont des anneaux, des corps.

Solution : *Soit $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A(x) + A(y) = A(x+y)$ et $A(x) + A(y) = A(x+y)$. On vérifie ainsi que M est un anneau et même un corps. De fait, $A \ : x \in \mathbb{R} \longmapsto A(x)$ est un morphisme d'anneaux.*

Soit $B(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} = xA(1)$. On a $A(1)^2 = 0$. On en déduit que $A(x)A(y) = 0 = A(0)$. La multiplication est donc associative, commutative, distributive par rapport à l'addition. En revanche il n'y a pas d'élément neutre. Bien entendu, M n'est pas un corps.

Références