Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *L'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad-bc \neq 0$ *et* $a^2-b^2-c^2-d^2 \leqslant 1$ *est il un sous-groupe de* $Gl_2(\mathbb{R})$ *?*
2. *L'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *est-il un sous-groupe de* $Gl_2(\mathbb{R})$ *?*
3. *Existe-t-il une valeur* $M \in \mathbb{R}$ *telle que l'ensemble des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad-bc \neq 0$ *et* $a \leqslant M$ *forme un sous-groupe de* $Gl_2(\mathbb{R})$ *?*

Solution :

1. *L'ensemble* G *des matrices* $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *avec* $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ *tels que* $ad-bc \neq 0$ *et* $a^2-b^2-c^2-d^2 \leqslant 1$ *n'est pas un sous-groupe de* $Gl_2(\mathbb{R})$*. En effet les deux matrices* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ *appartiennent à* G *et leur produit* $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ *n'appartient pas à* G*.*
2. *L'ensemble* H *des matrices* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *avec* $a \in \mathbb{R}^*$ *et* $b \in \mathbb{R}$ *est un sous-groupe de* $Gl_2(\mathbb{R})$*. En effet,*
   - I_2 *élément neutre de* $Gl_2(\mathbb{R})$ *appartient à* H*.*
   - *Soient* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *et* $M' = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ *deux éléments de* H *alors* $MM' = \begin{pmatrix} ac & ad+bc^{-1} \\ 0 & (ac)^{-1} \end{pmatrix}$ *donc le produit de deux éléments de* H *appartient à* H*.*
   - *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$*. Alors* $M^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *appartient à* H*.*

3. Soit K_M l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$ et $a \leqslant M$.
Nous allons montrer, en raisonnant par l'absurde, qu'il n'existe pas de valeur $M \in \mathbb{R}$ telle que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que K_M forme un sous-groupe de $Gl_2(\mathbb{R})$. Alors I_2 appartient à K_M donc $M \geqslant 1$. Ainsi, les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent à K_n donc le produit $AA_n = \begin{pmatrix} 1+n & 2 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ appartient à K_n. En conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + n \leqslant M$, ce qui est absurde.

Références