Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour la multiplication usuelles des matrices carrées, les ensembles suivants sont-ils des groupes :

$$GL(2,\mathbb{R}) \cap \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}), \quad \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det M = 1\} \text{ ?}$$

Solution : *Le premier ensemble n'est pas un groupe car, par exemple, la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *ne peut avoir pour inverse que* $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *qui n'appartient pas à l'ensemble.*

Notons $G = \{M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det M = 1\}$ *et montrons que* G *est un sous-groupe de* $GL_2(\mathbb{R})$.

- *la matrice identité appartient à* G.
- *si* $A, B \in G$ *alors* $AB \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{Z})$ *et* $\det AB = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$, *et donc* $AB \in G$.
- *Si* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z})$ *alors* $\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ *appartient à* G *et est l'inverse de* A.

Références