Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = (-1)^i . \left(\ n-j-1 i \ \right) (0 \leqslant i, j \leqslant n-1)$.

1. *Démontrer que $A^3 = (-1)^{n-1} I_n$.*

   Indication 0.0 : *On pourra considérer* $L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P(X) & \longmapsto & (1-X)^{n-1} . P\left(\frac{1}{1-X}\right) \end{array} \right.$.

2. *En déduire que*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{i+k+\ell} \left(\begin{array}{c} n-k-1 \\ i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n-\ell-1 \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n-j-1 \\ \ell \end{array} \right) = (-1)^{n-1} \delta_{ij}$$

   pour tout $(n, i, j) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $i, j \leqslant n$.

Solution :

1. *Remarquons que L est bien linéaire, et que $L(X^k) = (1-X)^{n-1} . \dfrac{1}{(1-X)^k} = (1-X)^{n-k-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. L est donc bien un endomorphisme. $L^2(X^k) = (1-X)^{n-1} \left(1 - \dfrac{1}{1-X}\right)^{n-k-1} = (1-X)^{n-1} \left(\dfrac{-X}{1-X}\right)^{n-k-1} = (-X)^{n-k-1}(1-X)^k$.*

   $L^2(X^k) = (1-X)^{n-1} \left(-\dfrac{1}{1-X}\right)^{n-k-1} \left(1 - \dfrac{1}{1-X}\right)^k = (1-X)^{n-1} \left(-\dfrac{1}{1-X}\right)^{n-k-1} \left(\dfrac{-X}{1-X}\right)^k = (-1)^{n-1} X^k$.

   Donc $L^3 = (-1)^{n-1} \operatorname{id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

   Enfin La matrice de L dans la base naturelle de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est donnée par ses vecteurs colonnes. La $j^{\text{ème}}$ est donnée par $L(X^j) = (1-X)^{n-j-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j-1} (-1)^i \binom{n-j-1}{i} X^i =$

$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-j-1}{i}X^i$. *On retrouve donc bien la matrice A.*
On a donc bien $A^3=(-1)^{n-1}I_n$.

2. *Le calcul de $B=A^3$ s'obtient par*
$b_{ij} \ = \ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}a_{ik}a_{k\ell}a_{\ell j} \ = \ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-k-1}{i}(-1)^k\binom{n-\ell-1}{k}(-1)^\ell\binom{n-j-1}{\ell}$.
D'où le résultat.

Références