Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On définit l'application

$$f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

1. *Vérifier que f_A est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Comparer $\operatorname{rg} f_A$ et $\operatorname{rg} u_A$ où u_A est l'unique endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

Solution :

1. *Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on trouve $M = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$.*
2. *En général on a $\operatorname{rg} f_A = 2 \operatorname{rg} u_A$. Si A est inversible, alors f_A est inversible, et f_A^{-1} est définie par*
   $f_A^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & A^{-1}X \end{array} \right.$ *. Donc $\operatorname{rg} f_A = 4 = 2 \operatorname{rg} u_A$.*
   Si A est nulle, il en est de même pour f_A.
   Si A est de rang 1, alors il existe une relation de dépendance linéaire entre les deux colonnes. On retrouve cette relation entre la premières et troisième colonne de M d'une part et entre la deuxième et la quatrième d'autre part. Donc l'espace engendré par les colonnes de M est de dimension inférieure ou égale à 2. Par ailleurs la première et la deuxième colonne sont linéairement indépendantes. D'où le résultat.

Références