Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ donnée par : $\forall (i,j)\, [\![1, n+1]\!], \quad a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme $\theta \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}_n[X])$ dans la base canonique $e = (1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. *Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Expliciter $\theta(P)$.*
2. *En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.*
3. *Calculer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

Solution :

1. *Soient $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $V = \operatorname{Mat}_e(P) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. On a :*

$$\operatorname*{Mat}_e(\theta(P)) = AV = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \\ \vdots \\ \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \binom{k}{0} a_k \\ \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} a_k \\ \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} a_{n-1} + \binom{n}{n-1} a_n \\ \binom{n}{n} a_n \end{pmatrix}$$

et donc $\theta(P) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{k}{0} a_k\right) + \left(\sum_{k=1}^n \binom{k}{1} a_k\right) X + \dots + \left(\binom{n-1}{n-1} a_{n-1} + \binom{n}{n-1} a_n\right) X^{n-1} + \binom{n}{n} a_n X^n$, ce qui amène, en regroupant par coefficients et en utilisant la formule du binôme :

$$\begin{aligned} \theta(P) = &\quad a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k + a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k + \dots + a_1 (X+1) + a_0 \\ = &\quad a_n (X+1)^n + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + \dots + a_1(X+1) + a_0 \\ = &\quad P(X+1) \end{aligned}$$

On a alors montré que $\boxed{\theta(P) = P(X+1)}$.

2. *θ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et , pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\theta^{-1}(P) = P(X-1)$. On déduit de la question précédente que A est inversible et que : $A^{-1} = \mathrm{Mat}_e\left(\theta^{-1}\right) = (b_{ij})$ avec pour tout $i, j \in [\![0, n]\!]$,* $\boxed{b_{ij} = (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}}$
3. *De la même façon que précédemment, $A^m = \mathrm{Mat}_e(\theta^m)$ et, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\theta^m(P) = P(X+m)$ donc $A^m = (c_{ij})$ avec pour tout $i, j \in [\![0, n]\!]$,* $\boxed{c_{ij} = m^{j-i}\binom{j-1}{i-1}}$.

Références