Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

9 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E. Montrez que $f^2 = 0$ si et seulement s'il existe une base e de E telle que

$$\underset{e}{\mathrm{Mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution : *Si $f^2 = 0$, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. D'après le théorème du rang,*

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = 3$$

Comme $\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$, il vient que $3 \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$ et donc que $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 2$. Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ et $\dim \operatorname{Im} f = 1$. Donc il existe un vecteur $e_1 \in E$ non-nul tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1)$. On complète en une base (e_1, e_3) de $\operatorname{Ker} f$ que l'on complète ensuite en une base (e_1, e_2, e_3) de E. Comme $f(e_2) \in \operatorname{Im} f$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_2) = \lambda e_1$. Mais λ n'est pas nul (sinon $f = 0$); on pose alors $\varepsilon_2 = \frac{1}{\lambda} e_2$. La matrice de f dans la base $e = (e_1, \varepsilon_2, e_3)$ est de la forme souhaitée. La réciproque est évidente.

Références