Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *et les vecteurs* $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$ *donnés par :*

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{ch} x, \quad f_2 : x \mapsto \operatorname{sh} x, \quad f_3 : x \mapsto x \operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad f_4 : x \mapsto x \operatorname{sh} x$$

1. *Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel* F *de* E *engendré par la famille* $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.
2. *Soit* $\varphi : f \mapsto f''' - 2f'' + f' - f$. *Montrer que* $\varphi \in \mathfrak{L}(E)$.
3. *Déterminer la matrice de* φ *dans la base* f.
4. φ *est-elle un automorphisme de* F *dans* F *? Si oui, déterminer la matrice de* φ^{-1} *dans la base* f.
5. *Trouver une solution particulière de l'équation différentielle :* $f''' - 2f'' + f' - f = \operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x$.

Solution :

1. $\dim F = 4$ *car la famille* f *est libre. En effet supposons* $\forall x \in \mathbb{R}, a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + cx \operatorname{ch} x + dx \operatorname{sh} x = 0$, *en regardant en 0, on a* $a = 0$ *on a donc* $dx \operatorname{sh} x = -(b \operatorname{sh} x + cx \operatorname{ch} x)$ *qui est donc une fonction impaire, d'où* $d = 0$. *Comme en* $b \operatorname{sh} x = \underset{x \to +\infty}{o}(x \operatorname{sh} x)$ *on en déduit que* d*, puis* c *sont nuls. Une autre technique consiste à utiliser les développements limités. En effet, un* $DL(0,3)$ *de* $f(x) = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + cx \operatorname{ch} x + dx \operatorname{sh} x$ *est*

$$f(x) = a + (b + c)\, x + (a/2 + d)\, x^2 + (b/6 + c/2)\, x^3 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^3\right)$$

et comme f *est nulle, par unicité du développement limité, il vient :*

$$\begin{cases} a & = 0 \\ b + c & = 0 \\ a/2 + d & = 0 \\ b/3 + c & = 0 \end{cases}.$$

L'unique solution de ce système est $a = b = c = d = 0$.

2. *La linéarité est claire.* $\varphi(f_1) = f_2 - 2f_1 + f_2 - f_1 = 2f_2 - 3f_1, \varphi(f_2) = 2f_1 - 3f_2, \varphi(f_3) = 2f_4 - 3f_3 + 4f_1 - 4f_2$ *et* $\varphi(f_4) = 2f_3 - 3f_4 + 4f_2 - 4f_1$.
3. $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
4. $M^{-1} = -\dfrac{1}{25} \begin{pmatrix} 15 & 10 & 4 & -4 \\ 10 & 15 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 15 \end{pmatrix}$. *Comme* M^{-1} *existe,* φ *est un automorphisme de* F.
5. *On cherche une solution* $u \in F$, *vérifiant* $\varphi(u) = f_2 + f_3 = v$. *Il suffit de prendre* $u = \varphi^{-1}(u)$ *pour cela on calcule* $- -\dfrac{1}{25} \begin{pmatrix} 15 & 10 & 4 & -4 \\ 10 & 15 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{25} \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *D'où* $u = -\dfrac{1}{25}\,(14 \operatorname{ch} x + 11 \operatorname{sh} x + 3x \operatorname{ch} x + 2x \operatorname{sh} x)$.

Références