Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP' + P \end{array} \right.$.

1. *Prouver que* $\varphi \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}_3[X])$.
2. *Calculer la matrice de* φ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.
3. *Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.*
4. *En déduire que* φ *est bijective et calculer l'image réciproque de chacun des éléments de la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$ *par* φ.

Solution :

1. *La linéarité provient de la linéarité de la dérivation et de la multiplication par* X. *Reste à démontrer que* $XP' + P$ *est un polynôme et que* $\deg(XP' + P) \leqslant 3$ *ce qui ne pose pas de difficulté.*
2. *On a* $\varphi\left(X^k\right) = XkX^{k-1} + X^k = (k+1)X^k$. *D'où la matrice :* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3. $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.
4. *On a* $\varphi^{-1}\left(X^k\right) = \dfrac{1}{k+1}X^k$.

Références