Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Pour chacune des applications linéaires suivantes :

1. *vérifier que u est linéaire.*
2. *déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés.*
3. *déterminer son rang.*
4. *Déterminer u^{-1} quand cette application existe.*
5. *calculer l'image du vecteur V donné en utilisant cette matrice.*

1. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, x-2y-3z) \end{array} \right.$ *et* $V = (0,1,-1)$..
2. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, y-z, z-x) \end{array} \right.$ *et* $V = (1,2,-1)$.
3. *On pose* $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{array} \right.$ *et* $V = (-1,0,2)$.
4. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X) - P \end{array} \right.$ *et* $V = X^3 - 3X^2 + X - 1$.
5. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array} \right.$ *et* $V = X^2 - X + 1$.
6. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{\mathrm{T}} \end{array} \right.$ *et* $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & EM \end{array} \right.$ *où* $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution :

1. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

   (b) $A = \mathrm{Mat}_{e' \Leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ *où e est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e' celle de $\mathbb{R}^2$.*

(c) $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) = 2$

(d) *u ne peut être bijective car $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ne sont pas de même dimension.*

(e) *On a* $B = \operatorname{Mat}_{e'} V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (0,1)$.

2. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

(b) $A = \operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

(c) $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) = 3$

(d) *On en déduit que u est bijective. De plus* $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *donc* u^{-1} :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(x-z, x+2y+z, x+z) \end{array} \right.$$

(e) *On a* $B = \operatorname{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (0,3,-2)$.

3. (a) *u est linéaire par bilinéarité du produit vectoriel.*

(b) $A = \operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ *où e désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

(c) $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A = 2$.

(d) *u n'est donc pas bijective.*

(e) *On a* $B = \operatorname{Mat}_e V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = (-2,3,-1)$.

4. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

(b) $A = \operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *où* $e = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}_3[X]$.

(c) $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} A = 3$.

(d) *u n'est donc pas bijective.*

(e) *On a* $B = \operatorname{Mat}_e V = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

5. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

(b) $A = \mathrm{Mat}_{e' \Leftarrow e}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *où e' est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e celle de $\mathbb{R}_2[X]$.*

(c) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, A = 3$.

(d) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. *On en déduit que* u^{-1} : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(2x + (-3x+4y-z)X + (x-2y+z)X^2\right) \end{array} \right.$

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = 3X^2 + X + 1$.

6. (a) *u est linéaire car l'opération de transposition est linéaire.*

(b) $A = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

(c) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, A = 4$.

(d) *On vérifie sans peine que $A^{-1} = A$ ce qui se vérifie par ailleurs en remarquant que la transposition est une symétrie de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.*

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

7. (a) *On vérifie facilement que u est linéaire.*

(b) $A = \mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *où $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est la base canonique de* $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

(c) $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, A = 4$.

(d) *On vérifie que* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On montre par ailleurs que :* u^{-1} : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & E^{-1}M \end{array} \right.$

(e) *On a* $B = \mathrm{Mat}_e V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Donc* $u(V) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Références