Matrices de Jordan

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Matrices de Jordan***

1. *Soit la matrice* $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Calculer les matrices* J^2 *et* J^n *pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Calculer les puissances de la matrice* $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & & 0 \\ b & a & & & \vdots \\ 0 & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. *Les matrices de cette forme sont appelées* matrices de Jordan.

Solution :

1. *On a* $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On déduit donc* J^2 *de* J *« en baissant d'un cran la diagonale de 1 dans la matrice ». On déduit* J^3 *de* J^2 *par le même procédé et ainsi de suite.*

   On obtient alors $J^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^n = 0$ *et* $J^m = 0$ *pour tout* $m \geqslant n$.

2. *On remarque que $A = aI_n + bJ$. Comme I_n et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme. On obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$:*

$$(aI_n + bJ)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k J^k$$

et

$$A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \binom{m}{1}a^{m-1}b & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ \binom{m}{m}b^m & & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{m}{m}b^m & \cdots & \binom{m}{1}a^{m-1}b & a^m \end{pmatrix} \text{ si } m < n$$

$$A^m = \begin{pmatrix} a^m & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \binom{m}{1}a^{m-1}b & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ \binom{m}{k}a^{m-k}b^k & & & & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{m}{n}a^{m-n}b^n & \cdots & & \binom{m}{k}a^{m-k}b^k & \cdots & \binom{m}{1}a^{m-1}b & a^m \end{pmatrix} \text{ si } m \geqslant n$$

Références