# Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

***Exercice 0.1*** ★★ ***Pas de titre***

1. *Soit la matrice* $H = ((h_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *avec* $h_{ij} = 1$. *Calculer* $H^k$.
2. *En déduire les puissances de la matrice* $A = ((a_{ij}))$ *où* $a_{ij} = (1 - \delta_{ij})$.
3. *Montrer que la matrice* $A$ *est inversible en calculant son rang.*
4. *Trouver l'inverse de la matrice* $A$ *(on le cherchera sous la forme* $aI + bH$*).*

***Solution :***

1. *On montre par récurrence que* $H^k = n^{k-1}H$ *pour* $k \geqslant 1$ *et* $H^0 = I$.
2. $A = H - I$. *En utilisant la formule du binôme,*

$$A^p = (-1)^p I + \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}n^k(-1)^{p-k}\right)H = (-1)^p I + \frac{(n-1)^p}{n}H - \frac{(-1)^p}{n}.H$$

3. *Par les opérations* $C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_1$, *puis en ajoutant toutes les colonnes de la matrice obtenue à la première,* $A$ *a même rang que la matrice triangulaire supérieure avec pour éléments* $(n-1), -1, \dots, -1$ *sur la diagonale. Par conséquent, pour* $n \geqslant 2$, *le rang de* $A$ *vaut* $n$ *et donc* $A$ *est inversible.*
4. *En calculant*

$$(aI + bH)(H - I) = -aI + (a + (n-1)b)H$$

*il suffit de prendre* $a = -1$ *et* $b = \dfrac{1}{n-1}$ *pour* $n \geqslant 1$. *Par conséquent,* $A$ *est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}H - I$$

## Références