Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$. *Calculer les puissances des matrices* A *et* B.

Solution : *On écrit* $A = I_3 + J$ *avec* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *On calcule* $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $J^3 = 0$. *En appliquant le binôme,* $A^n = I_3 + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2$.

On écrit $B = aI_3 + bP$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Alors* $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $P^3 = I_3$. *En appliquant la formule du binôme,* $B^n = \alpha I_3 + \beta P + \gamma P^2$ *avec* $\alpha = \sum_{k=0,k=3p}^{n} a^{n-k} b^k \binom{n}{k}$, $\beta = \sum_{k=0,k=3p+1}^{n} a^{n-k} b^k \binom{n}{k}$ *et* $\gamma = \sum_{k=0,k=3p+2}^{n} a^{n-k} b^k \binom{n}{k}$.
Pour calculer ces trois sommes, on développe $(a+b)^n$, $(a+jb)^n$ *et* $(a+j^2b)^n$. *On trouve ainsi*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & (a+b)^n \\ \alpha & + & \beta j & + & \gamma j^2 & = & (a+jb)^n \\ \alpha & + & \beta j^2 & + & \gamma j & = & (a+j^2b)^n \end{array} \right. .$$

Soit $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} (a+b)^n \\ (a+jb)^n \\ (a+j^2b)^n \end{pmatrix}$. *Posons aussi* $\overline{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$. *On* a $V\overline{V} = 3I_3$, *donc* $X = \frac{1}{3}\overline{V}D$, *soit*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \frac{1}{3}\left((a+b)^n + (a+jb)^n + (a+j^2b)^n\right) \\ \beta & = & \frac{1}{3}\left((a+b)^n + j^2(a+jb)^n + j(a+j^2b)^n\right) \\ \gamma & = & \frac{1}{3}\left((a+b)^n + (ja+jb)^n + j^2(a+j^2b)^n\right) \end{array} \right. .$$

Autrement dit $B^n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\left(\begin{matrix} (a+b)^n + (a+jb)^n + (a+j^2b)^n & (a+b)^n + j^2(a+jb)^n + j(a+j^2b)^n & (a+b)^n + (ja+jb)^n + j^2(a+j^2b)^n \\ (a+b)^n + (ja+jb)^n + j^2(a+j^2b)^n & (a+b)^n + (a+jb)^n + (a+j^2b)^n & (a+b)^n + j^2(a+jb)^n + j(a+j^2b)^n \\ (a+b)^n + j^2(a+jb)^n + j(a+j^2b)^n & (a+b)^n + (ja+jb)^n + j^2(a+j^2b)^n & (a+b)^n + (a+jb)^n + (a+j^2b)^n \end{matrix} \right.$$

Références