Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Calculer ses puissances A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution : *On pose $A = aI_2 + bJ$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que $J^2 = I_2$. Comme I_2 et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme :*

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} J^k = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} I_2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} J = SI_2 + TJ.$$

Maintenant $(a-b)^n = \displaystyle\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = S - T$. Comme $(a+b)^n = S+T$, on en déduit $S = \dfrac{1}{2}\left[(a+b)^n + (a-b)^n\right]$ et $T = \dfrac{1}{2}\left[(a+b)^n - (a-b)^n\right]$. Donc

$$A^n = \begin{pmatrix} S & T \\ T & S \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}.$$

Références