Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$$

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Solution : *Décomposons la matrice sous la forme $A = H - I$ où*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H^2 = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad H^3 = 0$$

Avec le binôme, on trouve finalement que

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -na & -na \\ -n & 1 + \frac{n(n-1)}{2}a & \frac{n(n-1)}{2}a \\ n & -\frac{n(n-1)}{2}a & 1 - \frac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}$$

Références