

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

18 juin 2022

## Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère la matrice  $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  remplie de 1 :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer  $J^2$  puis pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $J^k$ .

2.  $J$  est-elle inversible ?

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances successives de  $A$ .

### Solution :

1.  $J^2 = nJ$  puis par récurrence, pour  $k \geq 1$ ,  $J^k = n^{k-1}J$ .

2. Puisque  $J^2 = nJ$ , il vient que  $J(J - nI) = 0$  et alors si  $J$  était inversible, en multipliant à gauche par  $J^{-1}$ , on aurait  $J = nI$  ce qui est faux pour  $n \geq 2$ .

Remarque : La matrice  $J$  est visiblement de rang 1.

3. Écrivons  $A = 2I - J$  et en utilisant le binôme ( $I$  et  $J$  commutent), on trouve pour  $n \geq 1$  que

$$A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k J^k = 2^n I + \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k 3^{k-1} \right) J$$

Mais  $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k 3^{k-1} = \frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^k - 2^n \right) = \frac{(-1)^n - 2^n}{3}$ . Et finalement,

$$A^n = 2^n I + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} J.$$

## Références