Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

22 février 2024

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

On considère la matrice $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 1 :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer J^2 puis pour $k \in \mathbb{N}$, J^k.*

2. *J est-elle inversible ?*

3. *On considère la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Calculer les puissances successives de A.

Solution :

1. *$J^2 = nJ$ puis par récurrence, pour $k \geqslant 1$, $J^k = n^{k-1}J$.*
2. *Puisque $J^2 = nJ$, il vient que $J(J - nI) = 0$ et alors si J était inversible, en multipliant à gauche par J^{-1}, on aurait $J = nI$ ce qui est faux pour $n \geqslant 2$.*
   Remarque : La matrice J est visiblement de rang 1.
3. *Écrivons $A = 2I - J$ et en utilisant le binôme (I et J commutent), on trouve pour $n \geqslant 1$ que*
$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k J^k = 2^n I + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k 3^{k-1}\Big) J$$

Mais $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-1)^k 3^{k-1} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^k - 2^n\right) = \frac{(-1)^n - 2^n}{3}$. *Et finalement,*

$$A^n = 2^n I + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} J.$$

Références