Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que le polynôme* $X^2 - 5X + 4$ *est un polynôme annulateur de* A.
2. *En déduire que* A *est inversible et calculer son inverse.*
3. *Pour* $n \geqslant 2$, *déterminer le reste de la division euclidienne de* X^n *par* $X^2 - 5X + 4$.
4. *En déduire l'expression de* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. *Par un calcul direct.*
2. *On déduit de la question précédente que :* $A\left(\dfrac{5}{4}I_2 - \dfrac{1}{4}A\right) = I_2$. A *est donc inversible d'inverse :* $\dfrac{5}{4}I_2 - \dfrac{1}{4}A$.
3. *En utilisant le théorème de la division euclidienne, il existe des polynômes à coefficients réels* Q *et* R *tels que :* $X^n = Q\left(X^2 - 5X + 4\right) + R$ *et* $\deg R < 2$. *Le polynôme* R *est donc de la forme* $R = aX + b$. *Remarquant que les racines de* $X^2 - 5X + 4$ *sont 1 et 4, on obtient le système :* $\begin{cases} a + b & = 1 \\ 4a + b & = 4^n \end{cases}$ *qui admet comme solution :* $a = \dfrac{1}{3}(4^n - 1)$ *et* $b = \dfrac{1}{3}(4 - 4^n)$.
4. *On en déduit que si* $n \geqslant 2$, $A^n = Q(A)\left(A^2 - 5A + 4I_3\right) + R(A) = R(A) = \boxed{\dfrac{1}{3}(4^n - 1)A + \dfrac{1}{3}(4 - 4^n)I_2}$

Références