Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Montrer que* $A - I_3$ *est nilpotente d'ordre 3 (c'est-à-dire que* $(A - I_3)^2 \neq 0$ *et que* $(A - I_3)^3 = 0$
2. *En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Solution :

1. *Par un calcul direct, on montre que* $B = A - I_3$ *vérifie* $B^3 = 0$ *et* $B^2 \neq 0$.
2. *Utilisant la formule du binôme, ce qui est valide car* $I_3 \times B = B \times I_3$*, on obtient, pour* $n \geqslant 3$ *:*

$$\begin{aligned} A^n &= (B + I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \\ &= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(n-2) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette formule reste valable si $n = 0, 1, 2$.

Références