Formules des sinus, d'Al-Kashi, de Héron

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Formules des sinus, d'Al-Kashi, de Héron**

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC non aplati de sens direct (c'est-à-dire qu'on passe du point A au point B, et du point B au point C en tournant dans le sens direct) . On note : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$, $\widehat{C} = \widehat{ACB}$ et $\mathscr{A}$ l'aire de ABC. On note aussi R le rayon du cercle circonscrit à ABC, r le rayon du cercle inscrit à ABC et $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi-périmètre de ABC.

1. *Montrer que* $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \det\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = 2\mathscr{A}$
2. *En déduire la* ***formule des sinus*** *:*

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathscr{A}} = 2R.$$

3. *Prouver les* ***formules d'Al-Kashi*** *:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{B}$$

   Ces formules généralisent la formule de Pythagore dans un triangle quelconque.

4. *Déduire des deux dernières questions la* ***formule de Héron*** *:*

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)} = rp$$

Solution :

1. *Chacun des 3 déterminants est égal, le triangle étant direct, à $2\mathscr{A}$.*
2. *Par définition du déterminant et utilisant les égalités précédentes, on a :*

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\sin\widehat{A} = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\sin\widehat{B} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\|\left\|\overrightarrow{CB}\right\|\sin\widehat{C} = 2\mathscr{A}$$

   c'est-à-dire :

$$bc\sin\widehat{A} = ac\sin\widehat{B} = ab\sin\widehat{C} = 2\mathscr{A}.$$

En divisant ces dernières égalités par abc, on obtient :

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}=\frac{2\mathscr{A}}{abc}.$$

Par ailleurs, si on note I le milieu de $[BC]$ et O le centre du cercle circonscrit à ABC, l'angle inscrit $\widehat{BAC}$ intercepte le même arc de cercle que l'angle au centre $\widehat{BOC}$. Par conséquent : $\widehat{BOC}=2\widehat{BAC}=2\widehat{A}$. Par ailleurs, comme $OB=OC$, le triangle BOC est isocèle en O et BIO est rectangle en I. Dans ce dernier triangle, on peut écrire : $\sin\widehat{BOI}=\frac{a}{2R}$, ce qui amène : $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=2R$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
a^2 &= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\\
&= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}\\
&= \left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)\\
&= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA}-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}\\
&= \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\widehat{BAC}+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\\
&= c^2-2bc\cos\widehat{A}+b^2
\end{aligned}$$

On obtient les deux formules suivantes par permutations des lettres a, b et c.

4. Les deux premières égalités découlent directement des résultats établis dans la seconde question . Si K désigne le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et si K_A, K_B, K_C désignent respectivement l'intersection de ce cercle avec les côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ de ABC alors KK_A, KK_B, KK_C sont les hauteurs respectives des triangles KBC, KAC et KAB et ces hauteurs sont toutes de longueur r. Les aires de ces trois triangles sont donc respectivement $\frac{ar}{2}$, $\frac{br}{2}$ et $\frac{cr}{2}$. Comme ces trois aires partitionnent celle du triangle ABC, on a : $\mathscr{A}=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}=\frac{(a+b+c)r}{2}=pr$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}\\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\widehat{A}}\\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1-\cos\widehat{A}\right)\left(1+\cos\widehat{A}\right)}\\
&= \frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)} \text{ par application des formules d'Al-Kashi}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\left(2bc-a^2+b^2+c^2\right)\left(2bc+a^2-b^2-c^2\right)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{((b+c)+a)((b+c)-a)(a-(b-c))(a+(b-c))}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\frac{a+b+c-2a}{2}\frac{a+b+c-2b}{2}\frac{a+b+c-2c}{2}}\\
&= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}$$

Références