Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$, *Démontrer qu'il existe un unique polynôme* $U_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$, *de degré* n, *vérifiant*

$$\forall \vartheta \in \mathbb{R},\ \sin\vartheta\,.U_n(\cos\vartheta) = \sin(n+1)\vartheta.$$

Démontrer que

$$U_{n+1}(X) + U_{n-1}(X) = 2XU_n(X) \qquad (*)$$

Démontrer que

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall p \geqslant 1,\ U_{n+p} = U_pU_n - U_{p-1}U_{n-1} \qquad (**).$$

2. *Soit*

$$B_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 2x & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour $x \neq \cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $B_n(x)$ *est inversible et son inverse est la matrice symétrique définie par*

$$b'_{i,j} = (-1)^{i+j}\frac{U_{i-1}(x)U_{n-j}(x)}{U_n(x)} \text{ pour } i \leqslant j$$

et

$$b'_{i,j} = (-1)^{i+j}\frac{U_{j-1}(x)U_{n-i}(x)}{U_n(x)} \text{ pour } i \geqslant j.$$

Solution :

1. *Existence : On l'établit par récurrence. On peut prendre* $U_0(X) = 1, \quad U_1(X) = 2X$, *et puisque* $\sin(n+2)\vartheta + \sin n\vartheta = 2\cos\vartheta \sin(n+1)\vartheta$ *on a nécessairement*

$$\sin\vartheta\, U_{n+1}(\cos\vartheta) + \sin\vartheta\, U_{n-1}(\cos\vartheta) = 2\cos\vartheta \sin\vartheta\, U_n(\cos\vartheta).$$

Donc on choisit $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$ *sur* $[-1;1]$. *On en déduit que les* U_n *sont des fonctions polynômes, appelés* polynômes de Tchebychev *(de deuxième espèce). Les polynômes* $U_n(X)$ *ainsi construits conviennent et appartiennent à* $\mathbb{Z}[X]$.

Unicité : La différence de deux tels polynômes s'annulerait sur $[-1;1]$ *ce qui donne l'unicité.* *On a bien entendu*

$$U_{n+1}(X) + U_{n-1}(X) = 2XU_n(X). \qquad (*)$$

U_n *est de degré* n *par une récurrence immédiate.*

Les $\xi_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), 1 \leqslant k \leqslant n$ *sont les* n *racines distinctes de* U_n.

Enfin, en utilisant trois fois $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - cos(a+b))$, *on a d'une part :*

$$\sin^2\vartheta U_{n+p}(\cos\vartheta) = \sin\vartheta\sin(n+p+1)\vartheta = \frac{1}{2}\cos(n+p)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(n+p+2)\vartheta,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\sin^2\vartheta U_p(\cos\vartheta)U_n(\cos\vartheta) - \sin^2\vartheta U_{p-1}(\cos\vartheta)U_{n-1}(\cos\vartheta) &= \sin(p+1)\vartheta\sin(n+1)\vartheta - \sin p\vartheta\sin n\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(p+n+2)\vartheta \\ &\quad - \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta + \frac{1}{2}\cos(p+n)\vartheta \\ &= \frac{1}{2}\cos(p+n)\vartheta - \frac{1}{2}\cos(p-n)\vartheta\end{aligned}$$

On a bien établi (**)

2. *Soit* $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *(en posant* $U_{-1}(x) = 0$ *dans le cas où* $j = n$*)*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b'_{i,k}b_{k,j} &= b'_{i,j-1}b_{j-1,j} + b'_{i,j}b_{j,j} + b'_{i,j+1}b_{j+1,j} = b'_{i,j-1}b_{j-1,j} + 2xb'_{i,j} + b'_{i,j+1} \\ &= \frac{(-1)^{i+j-1}U_{i-1}U_{n-j+1} + (-1)^{i+j}2xU_{i-1}U_{n-j} + (-1)^{i+j+1}U_{i-1}U_{n-j-1}}{U_n(x)} \\ &= (-1)^{i+j-1}\frac{U_{i-1}\left(U_{n-j+1} - 2xU_{n-j} + U_{n-j-1}\right)}{U_n(x)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

d'après $(*)$ *où l'on remplace* n *par* $n - j$.

Pour $i = j$ (en posant $U_{-1}(x) = 0$ dans le cas où $j = n$ et donc $b'_{n,n+1} = 0$)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} b'_{i,k} b_{k,i} &= b'_{i,i-1} b_{i-1,i} + b'_{i,i} b_{i,i} + b'_{i,i+1} b_{i+1,i} = b'_{i,i-1} b_{i-1,i} + 2x b'_{i,i} + b'_{i,i+1} \\
&= -\frac{U_{i-2} U_{n-i} + 2x U_{i-1} U_{n-i} - U_{i-1} U_{n-i-1}}{U_n(x)} \\
&= \frac{1}{U_n(x)} \left(-U_{i-2} U_{n-i} + U_{i-1} \left(2x U_{n-i} + U_{n-i-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{U_n(x)} \left(-U_{i-2} U_{n-i} + U_{i-1} U_{n-i+1}\right) = \frac{1}{U_n(x)} U_{n-i+1+i-1} \text{ d'après } (**) \\
&= \frac{1}{U_n(x)} U_n = 1.
\end{aligned}$$

Références