Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Inverser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution : *Avec la forme de la matrice A, on peut faire le pari que la matrice inverse peut s'écrire, si elle existe,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z & t & u & v \\ v & x & y & z & t & u \\ u & v & x & y & z & t \\ t & u & v & x & y & z \\ z & t & u & v & x & y \\ y & z & t & u & v & x \end{pmatrix}.$$

L'égalité $AA^{-1} = I_6$ se traduit, pour la première colonne de AA^{-1}, par

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrcl} x & +6v & +5u & +4t & +3z & +2y & = & 1 \\ 2x & +v & +6u & +5t & +4z & +3y & = & 0 \\ 3x & +2v & +u & +6t & +5z & +4y & = & 0 \\ 4x & +3v & +2u & +t & +6z & +5y & = & 0 \\ 5x & +4v & +3u & +2t & +z & +6y & = & 0 \\ 6x & +5v & +4u & +3t & +2z & +y & = & 0 \end{array} \right.$$

Il n'est pas difficile de voir que la (les ?) solutions de ce système fournit une solution pour les autres colonnes.
Maintenant, en additionnant les lignes, en posant $S = x + v + u + t + z + y$, on obtient $21S = 1$.
Ensuite on multiplie la $2^{\text{ème}}$ la $4^{\text{ème}}$ et la $6^{\text{ème}}$ ligne par -1 et on additionne les six lignes pour

obtenir $-3x+3v-3u+3t-3z+3y=1$ *soit* $3S_1-3S_2=-1$ *en posant* $S_1=x+u+z$ *et* $S_2=v+t+y$. *Ce qui donne* $S_1=-\dfrac{1}{7}$ *et* $S_2=\dfrac{4}{21}$.

Si on continue dans la même idée, pourquoi ne pas multiplier la $2^{\text{ème}}$ *et la* $5^{\text{ème}}$ *ligne par* j *et la* $3^{\text{ème}}$ *et la* $6^{\text{ème}}$ *ligne par* j^2 *avant d'additionner le tout :* $(5+7j+9j^2)(x+t)+(9+5j+7j^2)(v+z)+(7+9j+5j^2)(u+y)=1$. *En utilisant* $7(1+j+j^2)=0$, *on a* $(-2+2j^2)(x+t)+(2-2j)(v+z)+(2j-2j^2)(u+y)=1$. *En factorisant par* $(2-2j)$, *on a* $j^2(x+t)+(v+z)+j(u+y)=\dfrac{1}{2(1-j)}=\dfrac{1-j^2}{2(1-j)(1-j^2)}=\dfrac{1}{6}(1-j^2)$. *En conjuguant, on obtient* $j(x+t)+(v+z)+j^2(u+y)=\dfrac{1}{6}(1-j)$.

En posant $T_1=x+t,\ T_2=v+z,\ T_3=u+y$ *on a*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} T_1 & + & T_2 & + & T_3 & = & \dfrac{1}{21} \\ j^2T_1 & + & T_2 & + & jT_3 & = & \dfrac{1}{6}(1-j^2) \\ jT_1 & + & T_2 & + & j^2T_3 & = & \dfrac{1}{6}(1-j) \end{array}\right.$$

. Bon, on sent qu'il y a de l'idée mais il n'y a rien de décisif. Il faut aller encore plus loin :

Soit $\zeta=\exp\left(\frac{2i\pi}{6}\right)$. *On multiplie la* $k^{\text{ème}}$ *ligne par* ζ^k *et on additionne le tout :* $xS+\zeta vS+\zeta^2uS+\zeta^3tS+\zeta^4zS+\zeta^5yS=1$ *en posant* $S=1+2\zeta+3\zeta^2+4\zeta^3+5\zeta^4+6\zeta^5$. *Soit* $P(X)=X\dfrac{X^6-1}{X-1}$, *on a* $S=P'(\zeta)$. *Or* $P'(X)=\dfrac{X^6-1}{X-1}+X\dfrac{6X^5(X-1)-(X^6-1)}{(X-1)^2}$, *d'où* $S=\dfrac{6}{\zeta-1}$.

On obtient ainsi en faisant jouer le rôle de ζ *par* $\zeta^2,\zeta^3,\ldots$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & +v & +u & +t & +z & +y & = & \dfrac{1-1}{6} \quad +\dfrac{1}{21} \\ x & +\zeta v & +\zeta^2u & +\zeta^3t & +\zeta^4z & +\zeta^5y & = & \dfrac{\zeta-1}{6} \\ x & +\zeta^2v & +\zeta^4u & +\zeta^6t & +\zeta^2z & +\zeta^4y & = & \dfrac{\zeta^2-1}{6} \\ x & +\zeta^3v & +\zeta^6u & +\zeta^9 & +\zeta^{12}z & +\zeta^{15}y & = & \dfrac{\zeta^3-1}{6} \\ x & +\zeta^4v & +\zeta^8u & +\zeta^{12}t & +\zeta^{16}z & +\zeta^{20}y & = & \dfrac{\zeta^4-1}{6} \\ x & +\zeta^5v & +\zeta^{10}u & +\zeta^{15}t & +\zeta^{20}z & +\zeta^{25}y & = & \dfrac{\zeta^5-1}{6} \end{array}\right.$$

On trouve x *en additionnant les lignes, en utilisant* $1+\zeta^k+\zeta^{2k}+\zeta^{3k}++\zeta^{4k}++\zeta^{5k}=0$ *pour* $1\leqslant k\leqslant 5$: $6x=\dfrac{1}{21}-1$ *d'où* $x=-\dfrac{10}{63}$. *Pour trouver* v, *on multiplie la* k*-ième ligne par* ζ^{5k} *et on additionne le tout :* $6v=1+\dfrac{1}{21}$ *d'où* $v=\dfrac{11}{63}$.

Pour trouver t, *on multiplie la* k*-ième ligne par* ζ^{4k} *et on additionne le tout :* $6u=\dfrac{1}{21}$ *d'où*

$t = \dfrac{1}{126}$. *Le même calcul donne le même résultat pour les autres inconnues :* $t = z = y = \dfrac{1}{126}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{126} \begin{pmatrix} -20 & 1 & 1 & 1 & 1 & 22 \\ 22 & -20 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 22 & -20 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 22 & -20 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 22 & -20 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 22 & -20 \end{pmatrix}.$$

Références