Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une matrice U triangulaire supérieure telle que tous les éléments de la diagonale soient non-nuls. Montrer que la matrice U est inversible. (On montrera que $UX = 0 \Longrightarrow X = 0$)

Solution : *Soit une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $UX = 0$. On obtient un système d'équations triangulaire sur les coordonnées de X qui se résout de proche en proche en partant de la dernière équation et on obtient finalement que $X = 0$. Par conséquent, U est inversible.*

Une autre façon de voir est de considérer que la matrice est celle d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base (X^k). L'hypothèse « U triangulaire supérieure avec tous les éléments de la diagonale non-nuls » se traduit par : $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \deg(u(X^k)) = k$. Donc u transforme la base (X^k) en une famille échelonnée en degrés, donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc u est bijectif, donc U est inversible.

Références