Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 mars 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit A une matrice carrée nilpotente de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice $(I_n - A)$ est inversible.

Solution : *On suppose que A est nilpotente d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$. On a donc $A^k = 0$ pour tout $k \geqslant p$ et $A^k \neq 0$ pour tout $k < p$. Mais*

$$(I_n - A)\left(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}\right) = (I_n - A) + \left(A - A^2\right) + \cdots + \left(A^{p-1} - A^p\right) = I_n$$

par télescopage et car $A^p = 0$. Donc $I_n - A$ est inversible d'inverse $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1}$.

Références