Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $I_n + A$ est inversible. Soit $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.

1. *Montrer que $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.*
2. *Montrer que $I_n + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.*

Solution :

1. *On a $(I_n + A)(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)$, donc $I_n - A = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n - A)$ donc $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$, ce qu'il fallait vérifier.*
   Un argument plus savant : $(I_n + A)^{-1}$ est un polynôme en A, et comme tel commute avec n'importe quel polynôme en A, par exemple $I_n - A$. En effet, soit $B = I_n + A$. La famille $I_n, B, B^2, \dots, B^{n^2}$ est liée. On peut écrire $\lambda_0 I_n + \lambda_1 B + \dots \lambda_k B^k = 0$ où k désigne le plus grand indice $\leqslant n^2$ pour lequel $\lambda_k \neq 0$. On a $\lambda_0 \neq 0$, sinon on aurait $B(\lambda_1 I_n + \dots \lambda_k B^{k-1} = 0$ et donc B ne serait pas inversible. Donc on peut écrire
   $$I_n = B\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0} I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} B - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} B^{k-1}\right).$$
   Donc $B^{-1} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} I_n - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} B - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} B^{k-1}$ est un polynôme en B donc un polynôme en $A = B - I_n$.
2. *$B = (2I_n - I_n - A)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - (I_n + A)(I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$. D'où $I_n + B = 2(I_n + A)^{-1}$, ce qui montre bien que $I_n + B$ est inversible. De plus $(I_n + B)^{-1} = \frac{1}{2}(I_n + A)$, d'où $A = 2(I_n + B)^{-1} - I_n$.*

Références